– Parcijalni izvodi složene funkcije –

Teorema 1: Neka su funkcije φ i ψ diferencijabilne u tački $M(x,y)$ i funkcija f diferencijabilna u tački $P(u,v)$ gdje je $u=\varphi(M)$ i $v=\psi(M)$. Tada je složena funkcija $z=f(\varphi(M),\psi(M))$ diferencijabilna u tački $M(x,y)$ i pri tome je:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$$

i $$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}$$

Primjer 1: Transformisati jednačinu:

$$(x+y)\frac{\partial z}{\partial x}-(x-y)\frac{\partial z}{\partial y}=0 \quad (*)$$

uvodeći nove promjenljive $u=\ln\sqrt{x^2+y^2}$ i $v=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$.

R) $u=\ln\sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{x}{x^2+y^2},\ \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{y}{x^2+y^2}$

$$v=\operatorname{arctg}\frac{y}{x} \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial x}=\frac{-\frac{y}{x^2}}{1+\frac{y^2}{x^2}}=-\frac{y}{x^2+y^2},$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{x}{x^2+y^2}.$$

②

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} =$$

$$= \frac{x}{x^2+y^2}\cdot\frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{y}{x^2+y^2} \quad (1)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} =$$

$$= \frac{y}{x^2+y^2}\cdot\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{x}{x^2+y^2}\cdot\frac{\partial z}{\partial v} \quad (2)$$

Iz (1) i (2) dobijamo:

$$(x+y)\frac{\partial z}{\partial x} - (x-y)\frac{\partial z}{\partial y} = (x+y)\left(\frac{x}{x^2+y^2}\cdot\frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{y}{x^2+y^2}\right)$$

$$- (x-y)\left(\frac{y}{x^2+y^2}\cdot\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{x}{x^2+y^2}\cdot\frac{\partial z}{\partial v}\right) =$$

$$= \left(\frac{x(x+y)}{x^2+y^2} - \frac{(x-y)y}{x^2+y^2}\right)\frac{\partial z}{\partial u} - \left(\frac{(x+y)y+(x-y)x}{x^2+y^2}\right)\frac{\partial z}{\partial v}$$

$$= \frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial z}{\partial v}$$

Iz (*) slijedi: $\frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial z}{\partial v} = 0$.

– Ekstremne vrijednosti funkcija više promjenljivih –

Def 1: (1) Neka je $f: D \to R$, $D \subset R^2$ funkcija dvije promjenljive i $M_0(x_0, y_0)$ unutrašnja tačka skupa D. Tačka $M_0(x_0, y_0)$ je tačka lokalnog minimuma funkcije f ako postoji okolina tačke $M_0(x_0, y_0)$ tako da za

svaku tačku $M(x,y)$ iz te okoline važi
$f(x,y) \geq f(x_0,y_0)$.
Tačka $M_0(x_0,y_0)$ je tačka lokalnog maksimuma funkcije f ako postoji okolina tačke $M_0(x_0,y_0)$ tako da za svaku tačku $M(x,y)$ iz te okoline važi $f(x,y) \leq f(x_0,y_0)$.
Tačke lokalnog minimuma i tačke lokalnog maksimuma nazivaju se tačkama lokalnih ekstremuma funkcije $z=f(x,y)$, a vrijednosti funkcije u njima su lokalni ekstremumi funkcije.

Teorema 1: Ako je $M_0(x_0,y_0)$ tačka lokalnog ekstremuma diferencijabilne funkcije f, onda je $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=0$ i $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=0$.

Napomena: Za tačku $M_0(x_0,y_0)$ kažemo da je stacionarna tačka funkcije $z=f(x,y)$ ako važi $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=0$ i $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=0$.

Iz prethodne teoreme slijedi da je tačka lokalnog ekstremuma diferencijabilne fje. ~~ujedno~~ i stacionarna tačka. Obrnuto ne mora da važi.

Primjer 1: Neka je $z = x \cdot y$.

Odredimo stacionarne tačke fje

$$f(x,y) = x \cdot y$$

Iz sistema
$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} y &= 0 \\ x &= 0 \end{aligned}$$

Dakle tačka $M_0(0,0)$ je stacionarna tačke funkcije. i pri tome je $f(M_0) = f(0,0) = 0$.
U svakoj okolini tačke $M_0(0,0)$ postoji tačka $M_1(x_1,y_1)$ gdje je $x_1 > 0$ i $y_1 > 0$ i $M_2(x_2, y_2)$ gdje je $x_2 > 0$ i $y_2 < 0$ pa je:
$f(M_1) = x_1 \cdot y_1 > 0 = f(M_0)$ a $f(M_2) = x_2 y_2 < 0 = f(M_0)$, što znači da M_0 nije tačka lokalnog ekstremuma.

Teorema 2: (dovoljan uslov lokalnog ekstremuma)

Neka je $M_0(x_0, y_0)$ stacionarna tačka funkcije $z = f(x,y)$, koja ima neprekidne izvode drugog reda u okolini tačke $M_0(x_0, y_0)$.

1) Ako je $d^2 f(x_0, y_0) > 0$ tada je tačka $M_0(x_0, y_0)$ tačka lokalnog minimuma funkcije f.

2) Ako je $d^2 f(x_0, y_0) < 0$ tada je tačka $M_0(x_0, y_0)$ tačka lokalnog maksimuma funkcije f.

Neka funkcija $z=f(x,y)$ ima stacionarnu tačku $M_0(x_0,y_0)$ i neka ima neprekidne parcijalne izvode drugog reda u okolini tačke $M_0(x_0,y_0)$.

Uvedimo oznake:

$$A=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\Big/(x_0,y_0),\quad B=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\Big/(x_0,y_0),\quad C=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\Big/(x_0,y_0)$$

i $D(M_0)=\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}=AC-B^2.$

Tada prethodnu teoremu možemo ovako formulisati:

1) Ako je $D(M_0)>0$, tada je $M_0(x_0,y_0)$ tačka lokalnog ekstremuma funkcije f, i to, tačka lokalnog minimuma ako je $A>0$ a tačka lokalnog maksimuma ako je $A<0$.

2) Ako je $D(M_0)<0$ tada tačka M_0 nije tačka lokalnog ekstremuma funkcije f.

3) Ako je $D(M_0)=0$ potrebno je dodatno ispitivanje.

Primjer 2: Odrediti ekstremne vrijednosti funkcije: $z = x^3 + y^3 - 3xy$ (6)

$$\left.\begin{array}{l}\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 0\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}3x^2 - 3y = 0 \\ 3y^2 - 3x = 0\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l}y = x^2 \\ x^4 = x\end{array} \Rightarrow \begin{array}{l}y = x^2 \\ x(x^3-1) = 0\end{array} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l}x = 0 \\ y = 0\end{array} \vee \begin{array}{l}x = 1 \\ y = 1.\end{array}$$

Dakle imamo stacionarne tačke $M(0,0)$ i $N(1,1)$.

Odredimo parcijalne izvode drugog reda

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -3, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6y$$

1) $A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\Big/_{M(0,0)} = 0, \quad B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\Big/_{M(0,0)} = -3,$

$C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\Big/_{M(0,0)} = 0.$

$D(M) = \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = -9 < 0 \Rightarrow M(0,0)$ nije tačka lokalnog ekstremuma date funkcije z.

2) $A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\Big/_{N(1,1)} = 6, \quad B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\Big/_{N(1,1)} = -3,$

$C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\Big/_{N(1,1)} = 6.$

$D(N) = \begin{vmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} = 27 > 0$ i $A > 0 \Rightarrow N(1,1)$ je tačka lokalnog minimuma i $z_{min} = z(1,1) = -1$.

Napomena: U primjeru 2, nakon određivanja stacionarnih tačaka $M(0,0)$ i $N(1,1)$ mogli smo koristiti Teoremu 2

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dx\,dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2 =$$
$$= 6x\,dx^2 - 6\,dx\,dy + 6y\,dy^2$$

U tački $N(1,1)$ dobijamo da je:

$$d^2z(1,1) = 6dx^2 - 6dx\,dy + 6dy^2 =$$
$$= 6\left(dx^2 - dx\,dy + \frac{1}{4}dy^2 - \frac{1}{4}dy^2 + dy^2\right) =$$
$$= 6\left(\left(dx - \frac{1}{2}dy\right)^2 + \frac{3}{4}dy^2\right) > 0,$$

pa je tačka $N(1,1)$ tačka lokalnog minimuma.

U tački $M(0,0)$ dobijamo da je

$d^2z(0,0) = -dx\,dy \Rightarrow M(0,0)$ nije tačka lokalnog ekstremuma, jer $d^2z(0,0)$ može biti i pozitivan i negativan.

Primjer 3: Posmatrajmo funkciju $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$. Ova f-ja nema parcijalne izvode u tački $(0,0)$.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0+\Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{\Delta x^2}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x}$$

Kako je $\lim\limits_{\Delta x \to 0^+} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0^+} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$,

dok je $\lim\limits_{\Delta x \to 0^-} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0^-} -\frac{\Delta x}{\Delta x} = -1$

to ne postoji $\frac{\partial f}{\partial x}/(0,0)$. Slično ne postoji $\frac{\partial f}{\partial y}/(0,0)$. Ali, za svako $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ važi $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} \geq 0 = f(0,0)$, tj. tačka $(0,0)$ je tačka minimuma funkcije $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$.

Za $(x,y) \neq (0,0)$ važi $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, i $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ pa u ovom slučaju funkcija nema stacionarnih tačaka.

– Ekstremne vrijednosti funkcije tri promjenljive –

Def: Neka je $f: D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ funkcija tri promjenljive i $M_0(x_0,y_0,z_0)$ unutrašnja tačka skupa D. Tačka $M_0(x_0,y_0,z_0)$ je tačka lokalnog minimuma funkcije f ako postoji okolina tačke $M_0(x_0,y_0,z_0)$ takva da za svaku tačku $M(x,y,z)$ iz te okoline važi $f(x,y,z) \geq f(x_0,y_0,z_0)$.

Tačka $M_0(x_0, y_0, z_0)$ je tačka lokalnog maksimuma funkcije f ako postoji okolina tačke $M_0(x_0, y_0, z_0)$ takva da za svaku tačku $M(x, y, z)$ iz te okoline važi $f(x, y, z) \leq f(x_0, y_0, z_0)$.

<u>Teorema 1:</u> Neka je f realna funkcija tri promjenljive koja ima neprekidne parcijalne izvode drugog reda u nekoj okolini tačke $A(x_0, y_0, z_0)$ i neka je $A(x_0, y_0, z_0)$ stacionarna tačka funkcije f tj. $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) = 0$ i $\frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) = 0$.

- Ako je $d^2 f(A) > 0$ (za $dx^2 + dy^2 + dz^2 \neq 0$) onda je tačka $A(x_0, y_0, z_0)$ tačka lokalnog minimuma funkcije f.
- Ako je $d^2 f(A) < 0$ (za $dx^2 + dy^2 + dz^2 \neq 0$) onda je tačka $A(x_0, y_0, z_0)$ tačka lokalnog maksimuma funkcije f.

(Ukoliko $d^2 f(A)$ mijenja znak, tada fja f u tački A nema lokalni ekstremum).

Neka je $M_0(x_0, y_0, z_0)$ stacionarna tačka funkcije ~~f~~ $u = f(x, y, z)$ i neka ova funkcija ima neprekidne parcijalne izvode drugog reda u okolini tačke $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

Neka je $A_1 = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big|_{M_0(x_0,y_0,z_0)}$, $A_2 = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\Big|_{M_0(x_0,y_0,z_0)}$,

$A_3 = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}\Big|_{M_0(x_0,y_0,z_0)}$, $B_1 = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\Big|_{M_0(x_0,y_0,z_0)}$,

$B_2 = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}\Big|_{M_0(x_0,y_0,z_0)}$, $C_1 = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\Big|_{M_0(x_0,y_0,z_0)}$.

Formirajmo matricu:

$$H(M_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big|_{M_0} & \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\Big|_{M_0} & \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}\Big|_{M_0} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}\Big|_{M_0} & \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\Big|_{M_0} & \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}\Big|_{M_0} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x}\Big|_{M_0} & \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y}\Big|_{M_0} & \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\Big|_{M_0} \end{bmatrix}$$

tj. $$H(M_0) = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ A_2 & B_1 & B_2 \\ A_3 & B_2 & C_1 \end{bmatrix}$$

Tada dovoljan uslov lokalnog ekstremuma u tački M_0 možemo ovako formulisati:

- Ako je $A_1 > 0$, $\begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ A_2 & B_1 \end{vmatrix} > 0$, $\begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ A_2 & B_1 & B_2 \\ A_3 & B_2 & C_1 \end{vmatrix} > 0$,

  onda je $M_0(x_0, y_0, z_0)$ tačka lokalnog minimuma.

- Ako je $A_1 < 0$, $\begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ A_2 & B_1 \end{vmatrix} > 0$, $\begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ A_2 & B_1 & B_2 \\ A_3 & B_2 & C_1 \end{vmatrix} < 0$,

  onda je $M_0(x_0, y_0, z_0)$ tačka lokalnog maksimuma.

Primjer: Odrediti lokalne ekstremume funkcije $u = x^2 + y^2 + z^2 + (4-x-y-z)^2$.

R/
$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= 2x - 2(4-x-y-z) = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= 2y - 2(4-x-y-z) = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial z} &= 2z - 2(4-x-y-z) = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} (1)\ 2x &= 4-y-z \\ 2y &= 4-x-z \\ 2z &= 4-x-y \end{aligned}\right\} \overset{+}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow 2(x+y+z) = 12 - 2(x+y+z) \Rightarrow x+y+z = 3$$

$$\Rightarrow y+z = 3-x \underset{(1)}{\Rightarrow} 2x = 4-(3-x) \Rightarrow \begin{aligned} x &= 1 \\ y &= 1 \\ z &= 1 \end{aligned}$$

Jedina stacionarna tačka je $M_0(1,1,1)$. (12)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=4, \quad \frac{\partial u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}=2$$

pa je $H(M_0)=\begin{bmatrix}4&2&2\\2&4&2\\2&2&4\end{bmatrix}$.

kako je $A_1=4>0$, $\begin{vmatrix}4&2\\2&4\end{vmatrix}=12>0$, $\begin{vmatrix}4&2&2\\2&4&2\\2&2&4\end{vmatrix}=32>0$

to je $M_0(1,1,1)$ tačka lokalnog minimuma gdje je i $u_{min}=f(1,1,1)=4$.

II način:

Kad odredimo stacionarnu tačku, $M_0(1,1,1)$ posmatramo $d^2f(M_0)$.

$$d^2f(M_0)=4dx^2+4dy^2+4dz^2+4dxdy+4dydz+4dxdz$$
$$=2(dx+dy+dz)^2+2dx^2+2dy^2+2dz^2>0$$

pa je $M_0(1,1,1)$ tačka lokalnog minimuma.

Primjer: Odrediti lokalne ekstremume funkcije $u = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z}$

R/
$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= 1 - \frac{y^2}{4x^2} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{y}{2x} - \frac{z^2}{y^2} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial z} &= -\frac{2}{z^2} + \frac{2z}{y} = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} \frac{y^2}{4x^2} &= 1 \\ \frac{z^2}{y^2} &= \frac{y}{2x} \ (*) \\ \frac{z}{y} &= \frac{1}{z^2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} \frac{y}{2x} &= \pm 1 \\ \frac{z}{y} &= \pm 1 \\ z &= \pm 1 \end{aligned}$$

Kako je $\frac{y}{2x} = \frac{z^2}{y^2} \geq 0$ to je $\frac{y}{2x} = 1$.

Slično iz $\frac{z}{y} = \frac{1}{z^2} > 0 \Rightarrow \frac{z}{y} = 1$.

1) $z = 1 \Rightarrow y = 1,\ x = \frac{1}{2}$;

2) $z = -1 \Rightarrow y = -1,\ x = -\frac{1}{2}$;

Dakle imamo dvije stacionarne tačke $A(\frac{1}{2}, 1, 1)$ i $B(-\frac{1}{2}, -1, -1)$.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{y^2}{2x^3},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\frac{y}{2x^2},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = 0$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{2x} + \frac{2z^2}{y^3},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = -\frac{2z}{y^2},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{4}{z^3} + \frac{2}{y}$$

1) $A(\frac{1}{2}, 1, 1)$

$$H(A) = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 6 \end{bmatrix};$$

Kako je $4 > 0$, $\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 8 > 0$, $\begin{vmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 6 \end{vmatrix} = 32 > 0$

to u tački A funkcija ima lokalni minimum.

$u_{min} = f(\frac{1}{2}, 1, 1) = 4$.

2) $B(-\frac{1}{2}, -1, -1)$

$$H(B) = \begin{bmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & -6 \end{bmatrix}$$

Kako je $-4 < 0$, $\begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 8 > 0$, $\begin{vmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & -6 \end{vmatrix} = -32 < 0$

to u tački B funkcija ima lokalni maksimum, $u_{max} = f(-\frac{1}{2}, -1, -1) = -4$.